TITLE:

LINEX損失関数の下での一般化Bayes推定量の許容性について (種々のモデルの統計的解析)

AUTHOR(S):

田中, 秀和

CITATION:

田中, 秀和. LINEX損失関数の下での一般化Bayes推定量の許容性について (種々のモデルの統計的解析). 数理解析研究所講究録 2008, 1603: 142-153

ISSUE DATE:

2008-06

URL:

http://hdl.handle.net/2433/139897

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第 1603 巻 2008 年 142-153

LINEX 損失関数の下での一般化 Bayes 推定量の許容性について

大阪府立大・工学研究科 田中 秀和 (Hidekazu Tanaka)
Graduate School of Engineering,
Osaka Prefecture University

1 はじめに

確率変数 X は，ある σ-有限測度に関する 1 母数指数型分布に従っているものとする．このとき, 2 乗誤差損失関数の下では, 推定量の許容性について様々な角度から研究がなされている．例えば, Karlin [3] は X の平均の推定において，aX が許容的となるための十分条件を導出した．この結果は一般の被推定関数の推定に対して拡張されてきた (Ghosh and Meeden [1], Ralescu and Ralescu [6], Hoffmann [2])．さらには, Pulskamp and Ralescu [5] は一般化 Bayes 推定量が許容的となるための十分条件を与えた.

ところが, 現実の社会では過大評価によって被る損失と過小評価によって被る損失が等しいという状況は稀のように思われる．そこで, 近年, 非対称な損失関数, とくに LINEX 損失関数 (Varian [11], Zellner [12]) の下での統計的推測の議論が活発に行われるようになった．しかし, 2 乗誤差損失関数の下では推定量の許容性に関する研究は数多くあるのに対し, LINEX 損失関数の下での研究はあまり見当たらない．その殆どが基礎的な分布を仮定し, $aX+b$ の形の線形推定量の許容性, 非許容性を論じたものに限る (Rojo [7], Sadooghi-Alvandi and Nematollahi [9], Kuo and Dey [4], Sadooghi-Alvandi [8])．つまり, LINEX 損失関数の下での推定量の許容性に関する一般論は議論されなかったようである．最近, Tanaka [10] は LINEX 損失関数の下での推定量の許容性について論じ, 推定量が許容的となるための十分条件を与え, この結果は 2 乗誤差損失関数の下での Pulskamp and Ralescu [5] の結果の拡張であることを示した.

本論では Tanaka [10] に基づいて, 一般化 Bayes 推定量が LINEX 損失関数の下で許容的となるための十分条件について概説し, また, 例では Tanaka [10] が与えた例よりやや広い事前分布のクラスを考え, 問題点等についても提起する.

2 準備

X はある σ-有限測度 μ に関する確率密度関数

$$f(x,\theta) = \beta(\theta)e^{\theta x} \quad (x \in \mathcal{X}, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R})$$

をもつ確率変数とする．ただし θ は未知とし，$\Theta := (\underline{\theta}, \overline{\theta})$ と表すこととする．このとき，$g(\cdot)$ を既知関数とし，$g(\theta)$ の推定問題を LINEX 損失関数

$$L(\theta,\delta) = b\left\{e^{a(\delta-g(\theta))} - a(\delta - g(\theta)) - 1\right\} \tag{2.1}$$

の下で考える．ただし，$a \neq 0, b > 0$ である．また，θ の広義の事前分布を $\pi(\theta)$ とする．ただし，$g(\theta), \pi(\theta)$ は区分的に連続であり，任意の $\theta \in \Theta$ に対して $\pi(\theta) > 0$ とする．このとき，$g(\theta)$ の事前分布 $\pi(\theta)$ に関する一般化 Bayes 推定量 $\delta_\pi(X)$ は可積分性の条件の下

$$\delta_\pi(X) = -\frac{1}{a}\log\frac{\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} e^{-ag(\theta)}f(X,\theta)\pi(\theta)d\theta}{\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} f(X,\theta)\pi(\theta)d\theta} \tag{2.2}$$

で与えられる (Zellner [12])．

仮定 1 (A1) 全ての $\theta \in \Theta$ に対して $E_\theta|\delta(X)|, E_\theta[e^{a\delta(X)}] < \infty$.

(A2) 全ての $u, v \in \Theta$ に対して $\int_u^v E_\theta|\delta(X) - g(\theta)|\pi(\theta)d\theta, \int_u^v E_\theta[e^{\delta(X)-g(\theta)}]\pi(\theta)d\theta < \infty$.

$\Delta := \{\delta(X)|$(A1), (A2) を満足する $\}$ とおく．

ここで，推定量の許容性を示すときによく用いられる Karlin の補題について紹介する．

補題 1 (Karlin [3]). $S(\theta)$ を $\Theta = (\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 上で定義された区分的に連続な非負値関数とし，適当な正値関数 $K(\theta)$ が存在して，全ての $u, v \in \Theta$ に対して

$$\int_u^v S(\theta)d\theta \leq \sqrt{S(v)}\sqrt{K(v)} + \sqrt{S(u)}\sqrt{K(u)}$$

が成り立つものとする．このとき，適当な $c \in \Theta$ が存在して

$$\lim_{b\to\overline{\theta}}\int_c^b \frac{d\theta}{K(\theta)} = \lim_{b\to\underline{\theta}}\int_b^c \frac{d\theta}{K(\theta)} = \infty$$

が成り立てば，$a.a.\theta \in \Theta$ に対して $S(\theta) = 0$ となる．

証明 (I) まず，$\liminf_{\theta\to\overline{\theta}} S(\theta)=0$ を背理法を用いて示す．$\liminf_{\theta\to\overline{\theta}} S(\theta)>0$ を仮定する．このとき，適当な $\theta_0\in\Theta$ が存在して，任意の $\theta\in(\theta_0,\overline{\theta})$ に対して $S(\theta)>0$ となる．$u\in(\theta_0,\overline{\theta})$ を固定し, $H(v):=\int_u^v S(\theta)d\theta$ とおく．このとき，任意の $v\in(u,\overline{\theta})$ に対して $H(v)\geq 0$ であり, $a.a.v\in(u,\overline{\theta})$ に対して $H'(v)=S(v)\geq 0$ が成り立つ． (i) 任意の $v\in(u,\overline{\theta})$ に対して $H(v)=0$ のとき, $H(v)$ の定義より $a.a.\theta\in(u,\overline{\theta})$ に対して $S(\theta)=0$ となり, $\liminf_{\theta\to\overline{\theta}} S(\theta)=0$ となることがわかる． (ii) ある $v_0\in(u,\overline{\theta})$ に対して, $H(v_0)>0$ となるとき, 任意の $v\in(v_0,\overline{\theta})$ に対して $H(v)>0$ となる．よって, 任意の $v\in(v_0,\overline{\theta})$ に対して

$$
\begin{aligned}
0 &< H(v)\\
&\leq \sqrt{H'(v)K(v)}+\sqrt{H'(u)K(u)}\\
&= \sqrt{H'(v)K(v)}\left(1+\sqrt{\frac{H'(u)K(u)}{H'(v)K(v)}}\right)\\
&\leq \sqrt{H'(v)K(v)}\left(1+\sup_{v_0<v<\overline{\theta}}\sqrt{\frac{H'(u)K(u)}{H'(v)K(v)}}\right)\\
&=: C_u\sqrt{H'(v)K(v)}
\end{aligned}
$$

となり, つまり,

$$C_u^2\frac{H'(v)}{H^2(v)}\geq\frac{1}{K(v)}$$

が成り立つ．両辺を区間 (c,b) $(v_0<c<b<\overline{\theta})$ で積分することにより

$$C_u^2\left(\frac{1}{H(c)}-\frac{1}{H(b)}\right)\geq\int_c^b\frac{dv}{K(v)} \tag{2.3}$$

を得る．ここで, $H(c)>0$ であるので, (2.3) の左辺は有界となる．これは, 仮定 $\lim_{b\to\overline{\theta}}\int_c^b dv/K(v)dv=\infty$ に矛盾する．よって, $H(v_0)>0$ となる $v_0\in(u,\overline{\theta})$ は存在しない．以上より, $\liminf_{\theta\to\overline{\theta}} S(\theta)=0$ となることがわかる．

(II) 次に, $a.a.\theta\in(\underline{\theta},\overline{\theta})$ に対して $S(\theta)=0$ となることを示す．(I) の結果により任意の $u\in(\underline{\theta},\overline{\theta})$ に対して

$$\int_u^{\overline{\theta}} S(\theta)d\theta\leq\sqrt{S(u)}\sqrt{K(u)}$$

が成り立つ．$u\in(\underline{\theta},\overline{\theta})$ に対して, $G(u):=\int_u^{\overline{\theta}} S(\theta)d\theta$ とおく．このとき, $a.a.u\in(\underline{\theta},\overline{\theta})$ に対して

$$G'(u)=-S(u)\leq 0$$

であるので, $a.a.u \in (\underline{\theta}, \overline{\theta})$ に対して

$$0 \le G(u) \le \sqrt{-G'(u)}\sqrt{K(u)} \tag{2.4}$$

が成り立つ. ここで, ある $u_0 \in (\underline{\theta}, \overline{\theta})$ に対して, $G(u_0) > 0$ が成り立つと仮定する. このとき, $G(u)$ の定義より, 任意の $w \in (\underline{\theta}, u_0)$ に対して $G(w) > 0$ が成り立つ. さらに (2.4) より $a.a.w \in (\underline{\theta}, u_0)$ に対して

$$-\frac{G'(w)}{G^2(w)} \ge \frac{1}{K(w)}$$

が成り立つ. 両辺を (b, c) $(\underline{\theta} < b < c < u_0)$ で積分することにより

$$\frac{1}{G(c)} - \frac{1}{G(b)} \ge \int_b^c \frac{dw}{K(w)} \tag{2.5}$$

を得る. ここで, $G(c) > 0$ であるので, (2.5) の左辺は有界であるが, これは, 仮定 $\lim_{b \to \underline{\theta}} \int_b^c dw/K(w) = \infty$ に矛盾する. よって, 任意の $u \in (\underline{\theta}, \overline{\theta})$ に対して $G(u) = 0$ が成り立つ. $G(u)$ の定義により, $a.a.\theta \in (\underline{\theta}, \overline{\theta})$ に対して $S(\theta) = 0$ となることがわかる. □

3 一般化 Bayes 推定量が許容的となるための十分条件

本節では一般化 Bayes 推定量 (2.2) が LINEX 損失関数 (2.1) の下で許容的となるための十分条件を与える.

定理 1 $\delta_\pi(X) \in \Delta$ を仮定し,

$$\begin{aligned} F(x,\theta) &:= \int_{\underline{\theta}}^{\theta} (e^{-a\delta_\pi(x)} - e^{-ag(t)}) f(x,t)\pi(t)dt, \\ \gamma(\theta) &:= \frac{e^{ag(\theta)}}{\pi(\theta)} \int_{\mathcal{X}} \frac{F^2(x,\theta)}{f(x,\theta)} e^{a\delta_\pi(x)} d\mu(x) \end{aligned}$$

とおく. このとき, 適当な $c \in \Theta$ が存在して

$$\lim_{b \to \overline{\theta}} \int_c^b \frac{d\theta}{\gamma(\theta)} = \lim_{b \to \underline{\theta}} \int_b^c \frac{d\theta}{\gamma(\theta)} = \infty$$

が成り立てば, $\delta_\pi(X)$ は Δ において LINEX 損失関数の下で許容的である.

証明 証明は Fubini の定理, Schwarz の不等式, Karlin の補題と不等式

$$x - y \le e^{-y}(e^x - e^y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

を用いることにより示すことができる. □

定理 1 において, $\gamma(\theta)$ を陽に表せる状況は極めて稀である. つまり, 定理 1 を適用するには $\gamma(\theta)$ の適当な上限を見つける必要がある. いま, $F(x,\theta)$ は簡単な式変形により

$$F(x,\theta)=\frac{\int_{\underline{\theta}}^{\theta}\int_{\theta}^{\overline{\theta}}\left(e^{-ag(s)}-e^{-ag(t)}\right)f(x,s)\pi(s)f(x,t)\pi(t)dsdt}{\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}f(x,s)\pi(s)ds}$$

と表されるので, 被推定関数 $g(\theta)$ が裾確率のような有界な関数の場合に対しては, 定理 1 は次のような簡潔な形に書き換えることができる.

系 1 被推定関数 $g(\theta)$ は有界な関数とし, $\delta_\pi(X)\in\Delta$ を仮定する. また,

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x,\theta) &:= \frac{\int_{\theta}^{\overline{\theta}}f(x,s)\pi(s)ds\int_{\underline{\theta}}^{\theta}f(x,t)\pi(t)dt}{\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}f(x,u)\pi(u)du},\\ \tilde{\gamma}(\theta) &:= \frac{1}{\pi(\theta)}\int_{\mathcal{X}}\frac{\tilde{F}^2(x,\theta)}{f(x,\theta)}d\mu(x)\end{aligned}$$

とおく. このとき, 適当な $c\in\Theta$ が存在して

$$\lim_{b\to\overline{\theta}}\int_c^b\frac{d\theta}{\tilde{\gamma}(\theta)}=\lim_{b\to\underline{\theta}}\int_b^c\frac{d\theta}{\tilde{\gamma}(\theta)}=\infty$$

が成り立てば, $\delta_\pi(X)$ は Δ において LINEX 損失関数の下で許容的である.

証明 容易であるので省略する.

4 LINEX 損失関数の場合と 2 乗誤差損失関数の場合の関係

よく知られているように, 適当に係数を調整することにより 2 乗誤差損失関数は LINEX 損失関数の特別な場合とみなすことができる. 本節では LINEX 損失関数の下での結果, つまり定理 1 及び系 1 と 2 乗誤差損失関数の下で Pulskamp and Ralescu [5] が導出した結果との関係について議論する.

2 乗誤差損失関数の下で事前分布 $\pi(\theta)$ に関する $g(\theta)$ の一般化 Bayes 推定量は可積分性の条件の下

$$\delta_\pi^Q(X)=\frac{\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}g(\theta)f(X,\theta)\pi(\theta)d\theta}{\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}f(X,\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

で与えられる.

仮定 2 $(\mathrm{A1})_Q$ 全ての $\theta \in \Theta$ に対して $E_\theta|\delta(X)| < \infty$.

$(\mathrm{A2})_Q$ 全ての $u, v \in \Theta$ に対して $\int_u^v E_\theta|\delta(X) - g(\theta)|\pi(\theta)d\theta < \infty$.

$\Delta_Q := \{\delta(X) | (\mathrm{A1})_Q, (\mathrm{A2})_Q$ を満足する $\}$ とおく.

このとき, 次の定理が知られている.

定理 2 (Pulskamp and Ralescu [5]). $\delta_\pi^Q(X) \in \Delta_Q$ を仮定し,

$$
\begin{aligned}
F_Q(x, \theta) &:= \int_{\underline{\theta}}^{\theta} (\delta_\pi^Q(x) - g(t)) f(x,t)\pi(t)dt, \\
\gamma_Q(\theta) &:= \frac{1}{\pi(\theta)} \int_{\mathcal{X}} \frac{F_Q^2(x,\theta)}{f(x,\theta)} d\mu(x)
\end{aligned}
$$

とおく. このとき, 適当な $c \in \Theta$ が存在して

$$
\lim_{b \to \overline{\theta}} \int_c^b \frac{d\theta}{\gamma_Q(\theta)} = \lim_{b \to \underline{\theta}} \int_b^c \frac{d\theta}{\gamma_Q(\theta)} = \infty
$$

が成り立てば, $\delta_\pi^Q(X)$ は Δ_Q において 2 乗誤差損失関数の下で許容的である.

LINEX 損失関数の場合と 2 乗誤差損失関数の場合との関係を議論するために, 以下の仮定を設ける. ここで U_0 は 0 の近傍である.

仮定 3 (B1) 各 $x \in \mathcal{X}$ に対して, Θ 上の可積分関数 $M_{1x}(\theta)$, $M_{2x}(\theta)$, $M_{3x}(\theta)$ が存在して

$$
\begin{aligned}
&e^{-ag(\theta)} f(x,\theta)\pi(\theta) \le M_{1x}(\theta), \\
&|g(\theta)| e^{-ag(\theta)} f(x,\theta)\pi(\theta) \le M_{2x}(\theta), \\
&\left| \frac{e^{-ag(\theta)} - 1}{a} \right| f(x,\theta)\pi(\theta) \le M_{3x}(\theta)
\end{aligned}
$$

が全ての $(\theta, a) \in \Theta \times U_0$ に対して成り立つ.

(B2) 各 $\theta \in \Theta$ に対して, $\mathcal{X}$ 上の可積分関数 $M_{4\theta}(x)$ が存在して

$$
\left\{ \frac{F(x,\theta)}{a} \right\}^2 \frac{e^{a\delta_\pi(x)}}{f(x,\theta)} \le M_{4\theta}(x)
$$

がすべての $(x, a) \in \mathcal{X} \times U_0$ に対して成り立つ.

定理 3 (B1) と (B2) を仮定する. このとき, 以下のことが全ての $x \in \mathcal{X}$ と全ての $\theta \in \Theta$ に対して成り立つ.

$a \to 0$ のとき

(i) $\delta_\pi(x) \to \delta_\pi^Q(x)$,

(ii) $\frac{1}{a}F(x,\theta) \to -F_Q(x,\theta)$,

(iii) $\frac{1}{a^2}\gamma(\theta) \to \gamma_Q(\theta)$.

証明 証明は, Lebesgue の収束定理及び平均値の定理を用いることにより容易に示すことができるので, 省略する.

注意 1 $a \to 0$ のとき,

$$\frac{2}{a^2 b}L(\theta,\delta) \to (\delta - g(\theta))^2$$

であるので, 定理 3 は定理 1 が定理 2 の拡張であることを意味している. また, もし $g(\theta)$ が有界であれば (B1) は自動的に満足し, (B2) は以下のように簡単な形となる.

(B2)′ 各 $\theta \in \Theta$ に対して

$$\int_{\mathcal{X}} \frac{\tilde{F}^2(x,\theta)}{f(x,\theta)} d\mu(x) < \infty.$$

ここで, $\tilde{F}(x,\theta)$ は系 1 において定義されたものである. さらに, 第 5 節で扱う 3 つの例では全て (B1), (B2) を満たしていることが示すことができる.

次に, $F_Q(x,\theta)$ は

$$F_Q(x,\theta) = \frac{\int_{\underline{\theta}}^{\theta}\int_{\theta}^{\overline{\theta}} (g(s)-g(t))\, f(x,s)\pi(s)f(x,t)\pi(t)dsdt}{\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} f(x,s)\pi(s)ds}$$

と表すことができるので, 系 1 に対応して, つぎの系を得る. 証明は系 1 と同様である.

系 2 被推定関数 $g(\theta)$ は有界であるとし, $\delta_\pi^Q(X) \in \Delta_Q$ を仮定する. このとき, 適当な $c \in \Theta$ が存在して

$$\lim_{b\to\overline{\theta}} \int_c^b \frac{d\theta}{\tilde{\gamma}(\theta)} = \lim_{b\to\underline{\theta}} \int_b^c \frac{d\theta}{\tilde{\gamma}(\theta)} = \infty \tag{4.1}$$

が成り立てば, $\delta_\pi^Q(X)$ は Δ_Q において 2 乗誤差損失関数の下で許容的である. ここで, $\tilde{\gamma}(\theta)$ は系 1 において定義されたものである.

注意 2 $g(\theta)$ が有界であり, (4.1) が成り立てば, $\delta_\pi(X)$ は Δ において LINEX 損失関数の下で許容的であり, さらに $\delta_\pi^Q(X)$ も Δ_Q において 2 乗誤差損失関数の下で許容的である.

5 例

本節では3つの例を挙げる．例 1 は線形推定量の例であり，定理 1 が適用できる場合である．例 2, 例 3 は Pulskamp and Ralescu [5] が 2 乗誤差損失関数の下で扱った非線形推定量の例である．いづれも系 1 が適用できる場合である．

例 1 (正規分布の平均). $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立に平均 θ, 分散 1 の正規分布に従う確率変数とし，未知母数 $\theta(\in \mathbb{R})$ の推定問題を考える．このとき，$X := \sum_{i=1}^n X_i/n$ は θ に関する十分統計量である．いま，事前分布 $\pi_\alpha(\theta) = e^{\alpha\theta}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ に関する θ の一般化 Bayes 推定量は

$$\delta_{\pi_\alpha}(X) = X + \frac{2\alpha - a}{2n}$$

となる．簡単な計算から

$$\begin{aligned} F(x,\theta) &= \exp\left\{-a\delta_{\pi_\alpha}(x) + \alpha x + \frac{\alpha^2}{2n}\right\} \\ &\quad \times \left\{\Phi\left(\sqrt{n}(\theta - x - \frac{\alpha}{n})\right) - \Phi\left(\sqrt{n}(\theta - x - \frac{\alpha - a}{n})\right)\right\}, \\ \gamma(\theta) &= \frac{1}{n}e^{\alpha\theta}\exp\left\{\frac{\alpha}{n}(a-\alpha)\right\}\Psi_n(a,\alpha) \end{aligned}$$

を得る．ただし

$$\Psi(a,\alpha) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\phi(y - \frac{a-\alpha}{\sqrt{n}})}\left\{\Phi(y) - \Phi(y - \frac{a}{\sqrt{n}})\right\}^2 dy$$

である．ここで，$\varepsilon \in (1/\sqrt{2}, 1)$ に対して，

$$\Psi(a,\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\sqrt{2\varepsilon^2 - 1}\left(y - \frac{a-\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right)\left\{\frac{\Phi(y) - \Phi(y - \frac{a}{\sqrt{n}})}{\phi^2(\varepsilon(y - \frac{a-\alpha}{\sqrt{n}}))}\right\}^2 dy$$

と変形でき，

$$\frac{\Phi(y) - \Phi(y - \frac{a}{\sqrt{n}})}{\phi(\varepsilon(y - \frac{a-\alpha}{\sqrt{n}}))}$$

は有界であるので，$\Psi(a,\alpha)$ は有限であることがわかる．よって，定理 1 より $\delta_{\pi_\alpha}(X)$ は $\alpha = 0$ のとき，許容的となることがわかる (Rojo [7])．また，$\alpha \neq 0$ のとき，$\delta_{\pi_\alpha}(X)$ の許容性，非許容性は，定理 1 では判定できない．しかし，実際には $\delta_{\pi_\alpha}(X)$ のリスクが

$$E_\theta[L(\theta, \delta_{\pi_\alpha}(X))] = b\left\{e^{a\alpha/n} - \frac{a\alpha}{n} - 1 + \frac{a^2}{2n}\right\}$$

となることから, 任意の $\alpha \neq 0$ に対して

$$E_\theta[L(\theta, \delta_{\pi_\alpha}(X))] - E_\theta[L(\theta, \delta_0(X))] = b\left\{e^{a\alpha/n} - \frac{a\alpha}{n} - 1\right\} > 0$$

となり, $\alpha \neq 0$ のとき, $\delta_{\pi_\alpha}(X)$ は非許容的であることがわかる.

注意 3 注意 1 で述べたように, 例 1 では (B1), (B2) を満足する. 実際, 任意の $a \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して, 不等式

$$e^{-a\theta} \leq e^{\varepsilon|\theta|}, \quad \left|\frac{e^{-a\theta} - 1}{a}\right| \leq \frac{e^{\varepsilon|\theta|}}{\varepsilon}$$

が成り立ち, さらに

$$\sqrt{n}\phi(\sqrt{n}(x-\theta))e^{\alpha\theta} = \sqrt{n}\phi\left(\sqrt{n}(x - \theta + \frac{\alpha}{n})\right)\exp\left(\alpha x + \frac{\alpha^2}{2n}\right)$$

となるので, (B1) が成り立つことがわかる. また,

$$\varphi_a(u) := \frac{\Phi(u) - \Phi(u - a/\sqrt{n})}{a/\sqrt{n}}\frac{1}{\phi(u)}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{F(x,\theta)}{a}\right)^2 \frac{e^{a\delta_{\pi_\alpha}(x)}}{f(x,\theta)} \\
&\quad = \frac{1}{n\sqrt{n}}\exp\left\{\frac{a^2}{2n} - a(x + \frac{\alpha}{n}) + 2\alpha\theta\right\}\phi(\sqrt{n}(x-\theta))\varphi_a^2\left(\sqrt{n}(x - \theta + \frac{\alpha}{n})\right)
\end{aligned}$$

となる. いま, $\varphi_a(u) \to 1$ $(a \to 0)$ であるので, 適当な $\delta > 0$ が存在して, $|\varphi_a(u)| < 2$ $(|a| < \delta)$ とできる. よって, $\varepsilon < \delta$ とすれば, 任意の $a \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して

$$\begin{aligned}
\left(\frac{F(x,\theta)}{a}\right)^2 \frac{e^{a\delta_{\pi_\alpha}(x)}}{f(x,\theta)} &\leq \frac{4}{n\sqrt{n}}\exp\left\{\frac{\varepsilon^2}{2n} + \left(|x| + |\frac{\alpha}{n}|\right)\varepsilon + 2\alpha\theta\right\}\phi(\sqrt{n}(x-\theta)) \\
&\leq C_{\varepsilon,\theta,\alpha}\phi\left(\sqrt{n}\left(|x| - |\theta| - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $C_{\varepsilon,\theta,\alpha}$ は a, x に依存しない定数である.

例 2 (正規分布の裾確率). 例 1 と同じ状況において, $g(\theta) = P_\theta(X_1 < 0) = \Phi(-\theta)$ の推定問題を考える. このとき, θ の事前分布 $\pi_\alpha(\theta) = e^\alpha$ に関する $g(\theta)$ の一般化 Bayes 推定量は

$$\delta_{\pi_\alpha}(X) = -\frac{1}{a}\log\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{n}\phi\left(\sqrt{n}(\theta - (X + \frac{\alpha}{n}))\right)e^{-a\Phi(-\theta)}d\theta$$

で与えられる．いま，$g(\theta)$ は有界であり，

$$\tilde{F}(x,\theta) = \Phi\left(\sqrt{n}(x-\theta+\frac{\alpha}{n})\right)\Phi\left(-\sqrt{n}(x-\theta+\frac{\alpha}{n})\right)\exp\left(\alpha x+\frac{\alpha^2}{2n}\right)$$

であるので，

$$\tilde{\gamma}(\theta) = \frac{1}{n}e^{\alpha\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\phi\left(y-\frac{2\alpha}{\sqrt{n}}\right)\left\{\frac{\Phi(y-\alpha/\sqrt{n})\Phi(-(y-\alpha/\sqrt{n}))}{\phi(y-\alpha/\sqrt{n})}\right\}^2 dy \tag{5.1}$$

を得る．ここで，

$$\frac{\Phi(y-\alpha/\sqrt{n})\Phi(-(y-\alpha/\sqrt{n}))}{\phi(y-\alpha/\sqrt{n})}$$

は有界であるので，(5.1) における積分は有限である．よって，系 1 により $\alpha = 0$ のとき，$\delta_{\pi_\alpha}(X)$ は LINEX 損失関数の下で許容的であることがわかる．

注意 4 例 1 では θ の事前分布 $\pi_\alpha(\theta)$ を考え，任意の α に対して一般化 Bayes 推定量の許容性，非許容性を明らかにすることができた．一方，例 2 では $\alpha \neq 0$ のとき，一般化 Bayes 推定量の許容性，非許容性については明らかにできていない．著者は，$\alpha \neq 0$ のとき $\delta_{\pi_0}(X)$ が $\delta_{\pi_\alpha}(X)$ を優越する，つまり，$\delta_{\pi_\alpha}(X)$ は非許容的であると予想している．

例 3 (指数分布の裾確率). $X_1,\ldots,X_n$ は互いに独立に指数分布 $Ex(1/\theta)$ に従う確率変数とする．ここで，$\theta(\in\mathbb{R}_+)$ は未知である．統計量 $X := \sum_{i=1}^n X_i$ はガンマ分布 $Ga(n,1/\theta)$ に従う．つまり，その確率密度関数は

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\theta x} & (x>0), \\ 0 & (x\le 0) \end{cases}$$

で与えられる．$g(\theta) = P_\theta(X_1>1) = e^{-\theta}$ とする．このとき，事前分布 $\pi_\beta(\theta) = \theta^\beta$ に関する $g(\theta)$ の一般化 Bayes 推定量は

$$\delta_{\pi_\beta}(X) \quad = \quad -\frac{1}{a}\log\frac{1}{\Gamma(n+\beta+1)}\int_0^\infty y^{n+\beta}e^{-y}\exp(-ae^{-y/X})dy$$

で与えられる．ただし，$n+\beta+1>0$ とする．この場合も $g(\theta)$ は有界であり，簡単な計算から

$$\tilde{F}(x,\theta) = \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(n+\beta+1)x^{\beta+2}}\int_0^{\theta x}y^{n+\beta}e^{-y}dy\int_{\theta x}^\infty z^{n+\beta}e^{-z}dz,$$

$$\tilde{\gamma}(\theta) = \frac{\theta^{\beta+2}}{\Gamma(n)\Gamma^2(n+\beta+1)}\int_0^\infty y^{n-1}e^{-y}\left(\frac{\int_0^y u^{n+\beta}e^{-u}du\int_y^\infty v^{n+\beta}e^{-v}dv}{y^{n+\beta+1}e^{-y}}\right)^2 dy \tag{5.2}$$

となることわかる．ここで，

$$\frac{\int_0^y u^{n+\beta}e^{-u}du\int_y^\infty v^{n+\beta}e^{-v}dv}{y^{n+\beta+1}e^{-y}}$$

は有界であるので，(5.2) における積分は有限である．よって，系 1 より $\beta=-1$ のとき，$\delta_{\pi_\beta}(X)$ は LINEX 損失関数の下で許容的であることがわかる．

6 おわりに

本論では，LINEX 損失関数の下で，一般化 Bayes 推定量が許容的となるための十分条件 (定理 1) について概説した．ここで，この十分条件は必要条件になっているかという問題が生じるが，結論として現在のところわかっていない．少なくとも第 5 節で考えた例では，十分条件を否定する例は見つかっていない．定理 1 の本質的な部分は Karlin [3] によるが，Karlin が与えた十分条件についても必要条件になっているかどうかについては未解決のようである．

参考文献

[1] Ghosh, M. and Meeden, G. Admissibility of linear estimators in the one parameter exponential family. *Ann. Statist.*, **5** (1977), 772–778.

[2] Hoffmann, K. Admissibility and inadmissibility of estimators in the one-parameter exponential family. *Statistics*, **16** (1985), 327–349.

[3] Karlin, S. Admissibility for estimation with quadratic loss. *Ann. Math. Statist.*, **29** (1958), 406–436.

[4] Kuo, L. and Dey, D. K. On the admissibility of the linear estimators of the Poisson mean using linex loss functions. *Statist. Decisions*, **8** (1990), 201–210.

[5] Pulskamp, R. J. and Ralescu, D. A. A general class of nonlinear admissible estimators in the one-parameter exponential case. *J. Statist. Plann. Inference*, **28** (1991), 383–390.

[6] Ralescu, D. and Ralescu, S. A class of nonlinear admissible estimators in the one-parameter exponential family. *Ann. Statist.*, **9** (1981), 177–183.

[7] ROJO, J. On the admissibility of $c\overline{X} + d$ with respect to the LINEX loss function. *Comm. Statist. Theory Methods,* **16** (1987), 3745–3748.

[8] SADOOGHI-ALVANDI, S. M. Estimation of the parameter of a Poisson distribution using a LINEX loss function. *Austral. J. Statist.*, **32**, (1990), 393–398.

[9] SADOOGHI-ALVANDI, S. M. AND NEMATOLLAHI, N. A note on the admissibility of $c\overline{X} + d$ relative to the linex loss function. *Comm. Statist. Theory Methods,* **18** (1989), 1871–1873.

[10] TANAKA, H. Sufficient conditions for the admissibility under LINEX loss function in regular case. Submitted for publication.

[11] VARIAN, H. R. A Bayesian approach to real estate assessment. *Studies in Bayesian econometrics and statistics,* In honor of Leonard J. Savage. Eds. Fienberg, S. E. and Zellner, A. North-Holland Amsterdam (1975), 195–208.

[12] ZELLNER, A. Bayesian estimation and prediction using asymmetric loss functions. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **81** (1986), 446–451.